

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## LA CALCULATRICE EST AUTORISÉE

Consignes à suivre à chaque DS :

- Numérotter les pages. Numérotter les questions (inutile d'écrire les titres).
- Soigner la rédaction et la présentation : aérer la copie, encadrer ou souligner les résultats, bien faire apparaître la numérotation des questions.
- Lire rapidement l'ensemble du sujet en début d'épreuve : les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Pour un exercice donné, traiter et rendre les questions dans l'ordre.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne sera pas prise en compte.

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

**Exercice 1 : Étude du Large Hadron Collider du CERN**

**Exercice 2 : Détecteur de métaux**

**Exercice 3 : Un modèle simplifié de génératrice linéaire : le rail de Laplace**

**Exercice 4 : Étude d'un haut-parleur électrodynamique**

# Étude du Large Hadron Collider du CERN

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

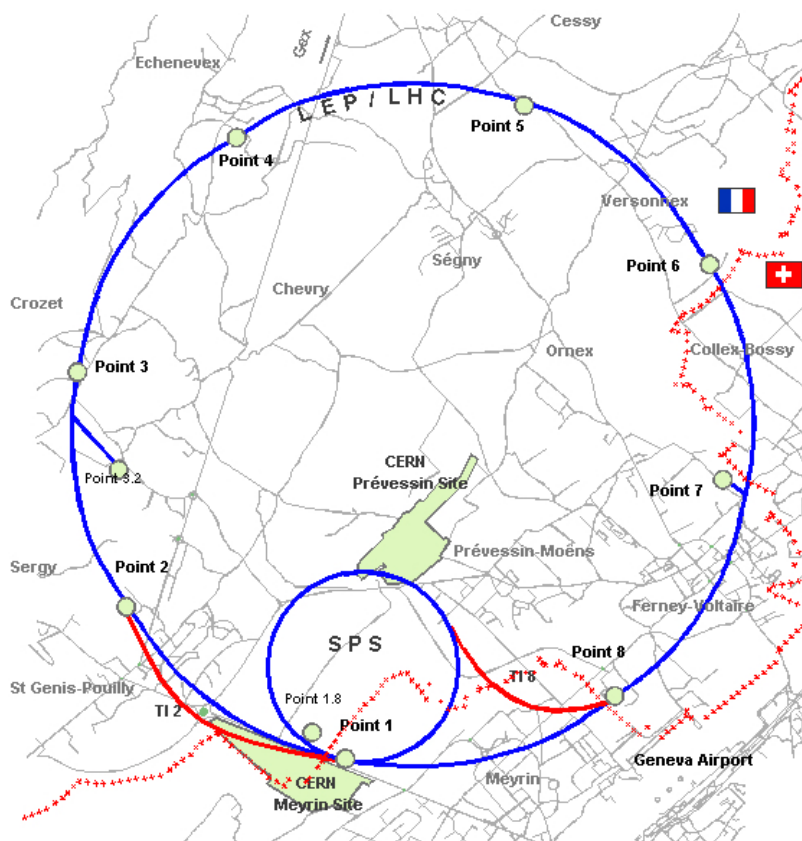


Figure 1 : Site du CERN, dans les environs de Genève. Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire et de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun. Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants. L'énergie des protons est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention. Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson de Higgs dont l'existence était prédite par le modèle standard. On se propose dans ce problème de comprendre quelques aspects du fonctionnement du LHC. Ce problème comporte quatre parties totalement indépendantes. Une première partie aborde différents aspects du proton et de l'atome d'hydrogène. La seconde partie est consacrée aux accélérateurs du LHC. La troisième partie étudie les techniques de refroidissement des composantes magnétiques du LHC. Enfin, une dernière partie s'intéresse à quelques enjeux énergétiques au LHC.

## Constantes physiques

Masse du proton	$m_p \simeq 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Charge électrique élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c \simeq 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

## Unités

Énergie	$1,00 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
	$1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$

## Précisions sur l'énoncé

Dans tout le problème, "exprimer" signifie donner l'expression littérale et "calculer" signifie donner la valeur numérique.

## Aide aux calculs

$3,2 \times 3,6 = 11,5$	$21,0 \times 1,60 = 33,6$	$2,4 \times 3,6 \times 2,7 \simeq 23$	
$6,63 \times 2,92 = 19,36$	$19,4 \times 1,6 = 31$	$1,6 \times 9,0 = 14,4$	$\sqrt{(10^5 + 10^7)} \simeq 3,2 \cdot 10^3$
$\sqrt{10} = 3,2$	$\sqrt{(10^5 + 9 \cdot 10^6)} \simeq 3,0 \cdot 10^3$	$\frac{19,36}{1,60} = 12,1$	$\frac{120}{23} \simeq 5,2$

## 2 Brève histoire d'un proton accéléré par le complexe d'accélérateurs du LHC au CERN

Dans cette partie, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

### 2.1 Particule dans un champ électrique constant et uniforme

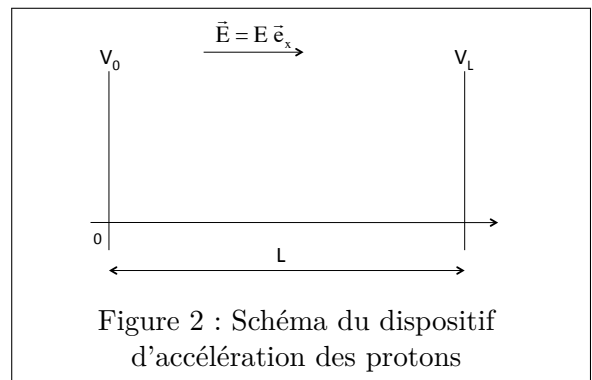
7) Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  ?

8) Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ  $E = 100 \text{ kV.m}^{-1}$ . On prendra  $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$ .

9) En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ .

10) La zone de l'espace où règne le champ  $\vec{E}$  a une longueur  $L$ . En considérant que le potentiel  $V_0$  du plan  $x = 0$  est nul, exprimer le potentiel  $V_L$  du plan  $x = L$ .

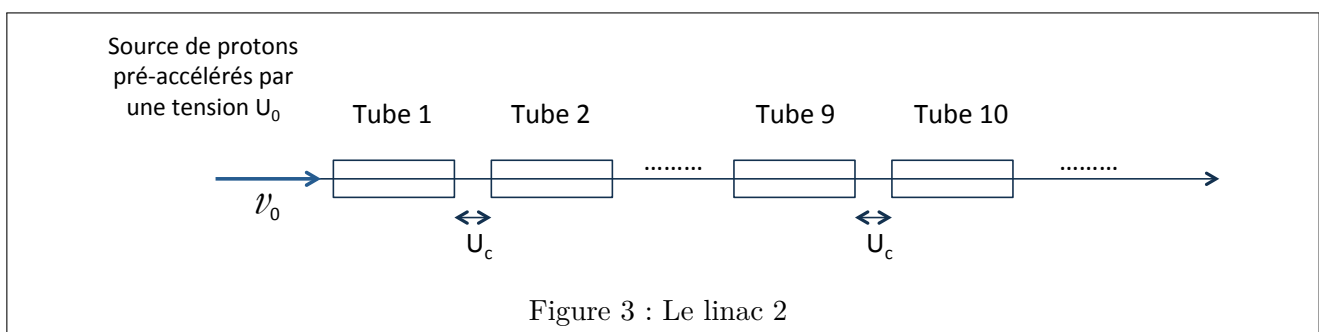
11) En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de  $E$  puis de  $V_L$ .



### 2.2 Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale  $U_C$  toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$  parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-acceleratrice  $U_0$ .



12) Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?

13) Exprimer leur énergie cinétique à la sortie du  $n$ -ième tube en fonction de  $U_C$  et  $U_0$ .

14) Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du  $10^{\text{ème}}$  tube pour  $U_0 = 200 \text{ kV}$ ,  $U_C = 2000 \text{ kV}$ .

15) Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

### 2.3 Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS). Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . À  $t = 0$  sa vitesse  $\vec{v}_0$  est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 4.

16) Donner le nom et l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique  $\vec{B}_0$ .

Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.

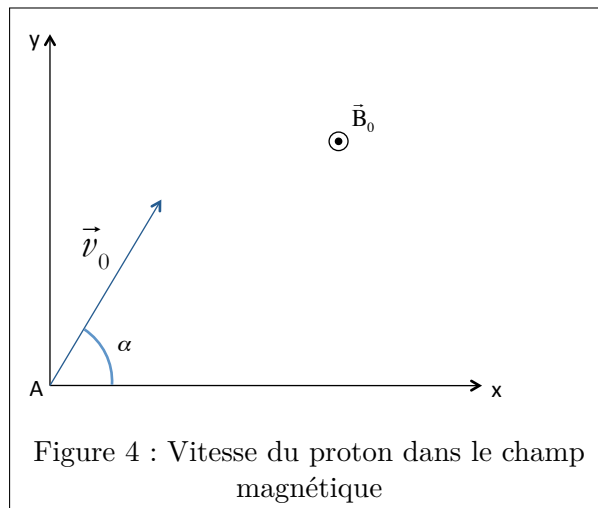
17) Reproduire la figure 4 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force.

18) Montrer que le travail associé à cette force est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.

19) Montrer que la trajectoire du proton est un cercle.

20) Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de  $m_p$ ,  $B_0$ ,  $e$  et  $v_0$ .

21) Quelle est la nature du mouvement du proton après sa sortie de la zone de champ magnétique ?



# Détecteur de métaux

Les détecteurs de métaux sont des instruments électroniques capables d'indiquer la présence de masses métalliques de nature et de taille différentes. Les détecteurs fixes sont utilisés dans les aéroports, dans l'industrie agro-alimentaire ou pharmaceutique, sur les réseaux routiers, etc. Les détecteurs mobiles peuvent servir à localiser et suivre le cheminement de canalisations enterrées ou de fils électriques, à aider aux fouilles archéologiques, à repérer des engins dangereux, etc.



**Figure 1** – Diverses utilisations de détecteurs de métaux

## Partie I - Principe de fonctionnement

Les détecteurs de métaux fonctionnent selon des principes variés dépendant de l'utilisation souhaitée. Nous allons nous intéresser ici aux détecteurs de métaux basés sur le battement de fréquence dont le principe est expliqué dans le **document 1**.

### **Document 1 - Principe du détecteur à battement de fréquence**

Le principe de fonctionnement d'un détecteur de métaux repose sur l'induction électromagnétique. Une bobine parcourue par un courant électrique variable génère un champ magnétique variable auquel sont soumis les objets situés dans la zone de détection. En réponse, les objets conducteurs, et en particulier les métaux, sont le siège de courants induits par ce champ magnétique variable, appelés courants de Foucault. Ces courants induits dans la matière engendrent à leur tour un champ magnétique qui est perçu par un circuit de détection.

Plus précisément, un détecteur à battement de fréquence utilise deux oscillateurs dont les fréquences d'oscillations sont identiques en l'absence d'objets à détecter. Chacun d'eux contient notamment une bobine dont le rôle sera différent selon le circuit.

.../...

### Document 1 (suite) - Principe du détecteur à battement de fréquence

L'un des deux oscillateurs fonctionne comme émetteur. Sa fréquence d'oscillations sert de référence et ne doit pas varier au cours de l'expérience. La bobine qu'il contient doit être tenue loin des objets à détecter.

L'autre oscillateur fonctionne comme récepteur. La bobine qu'il contient réagit au champ magnétique induit par les courants de Foucault, ce qui provoque une variation de sa fréquence d'oscillations par rapport au circuit de référence.

La comparaison des fréquences des deux oscillateurs renseigne sur la détection d'un objet métallique. Une variation de la fréquence de travail et une analyse fine des réponses obtenues permet de cibler la détection de métaux particuliers.

- Q1.** ~~Énoncer l'expression locale de l'équation de Maxwell qui décrit les phénomènes d'induction électromagnétique.~~ Rappeler la loi de Faraday en définissant les grandeurs intervenant dans cette loi.
- Q2.** Expliquer pourquoi le détecteur est sensible aux métaux mais pas aux végétaux ni aux minéraux.

## Partie IV - Détecteur de métaux

### Document 3 - Extrait de la notice d'un détecteur de métaux

Alimentation : 6 piles alcalines 1,5 V AA LR06 (*piles non fournies*)

Courant de fonctionnement : en veille ~ 65 mA  
max ~ 150 mA

Plage de tension de fonctionnement : 7,2 ~ 9,6 V

Fréquence de fonctionnement : 7,5 kHz ± 1 kHz

Sensibilité : Min. 20 cm (8 pouces)

Plage de température : - 20 °C à + 60 °C

Taille : 540 mm (l) ; 345 mm (L) ; 1 300 mm (h)

Poids net : 1,1 kg



Source 2018 : notice COGEX

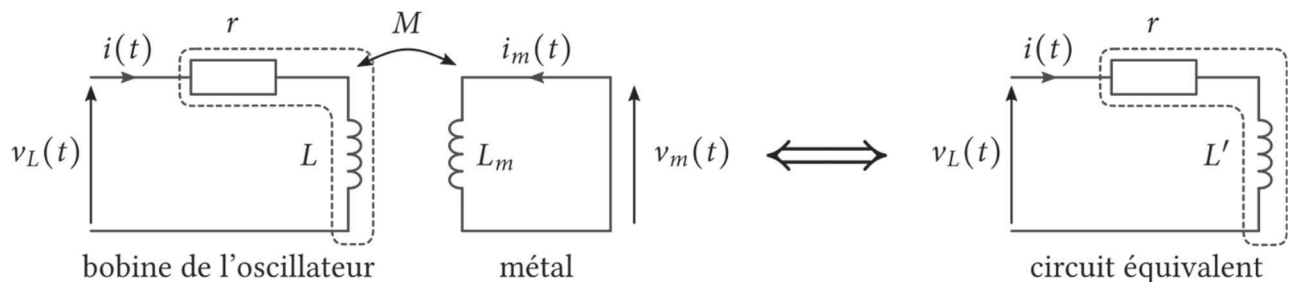
Pour fabriquer le détecteur de métaux, on associe deux circuits oscillateurs semblables au précédent (voir **document 1**). On note  $f_r$  la fréquence fixe du circuit de référence et  $f_d$  la fréquence variable du circuit de détection. En l'absence de détection, les fréquences d'oscillations des oscillateurs sont identiques :

$$f_r = f_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

**Q16.** Dans la pratique, peut-on concevoir deux oscillateurs de fréquences d'oscillations identiques ?  
Si oui expliquer pourquoi, si non, proposer une façon d'ajuster au mieux les fréquences.

#### Circuit de détection

Lorsqu'un métal est présent dans le champ de la bobine de détection, d'inductance propre  $L$ , on admet que le métal détecté se comporte comme une bobine d'inductance propre  $L_m$ . Le couplage entre les deux inductances est matérialisé par une inductance mutuelle notée  $M$ . L'inductance propre du circuit de détection se trouve alors modifiée et devient  $L'$ .



**Figure 9** – Circuit de détection équivalent en présence d'un métal

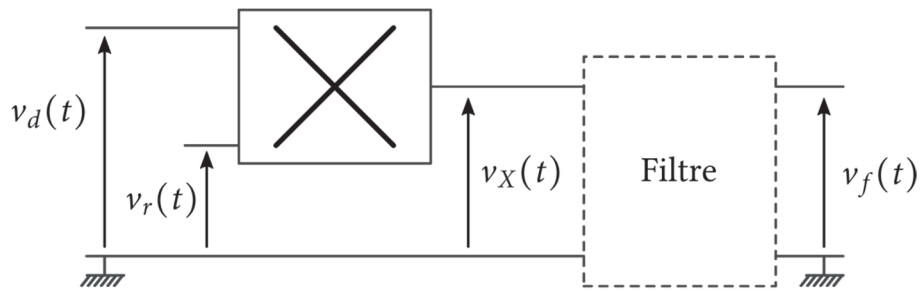
**Q17.** Exprimer  $v_m(t)$  et en déduire que  $\frac{di_m}{dt} = -\frac{M}{L_m} \frac{di}{dt}$ .

En déduire alors que la tension  $v_L(t)$  peut se mettre sous la forme

$$v_L(t) = ri + L' \frac{di}{dt} \quad \text{avec} \quad L' = L \left( 1 - \frac{M^2}{LL_m} \right).$$

**Q18.** Sachant que  $M^2 \ll LL_m$ , en déduire que la détection d'un métal engendre une variation relative de la fréquence d'oscillation du détecteur de la quantité  $\frac{\Delta f_d}{f_d} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{LL_m}$ .

On note respectivement  $v_r(t) = v_{r0} \cos(2\pi f_r t)$  et  $v_d(t) = v_{d0} \cos(2\pi f_d t)$  les tensions de chacun des oscillateurs respectivement de référence et de détection. Afin de déterminer la variation de fréquence, on utilise le montage de la **figure 10** comprenant un multiplieur réalisant l'opération  $v_X(t) = K \cdot v_d(t) \cdot v_r(t)$  et un filtre dont la nature est à déterminer.



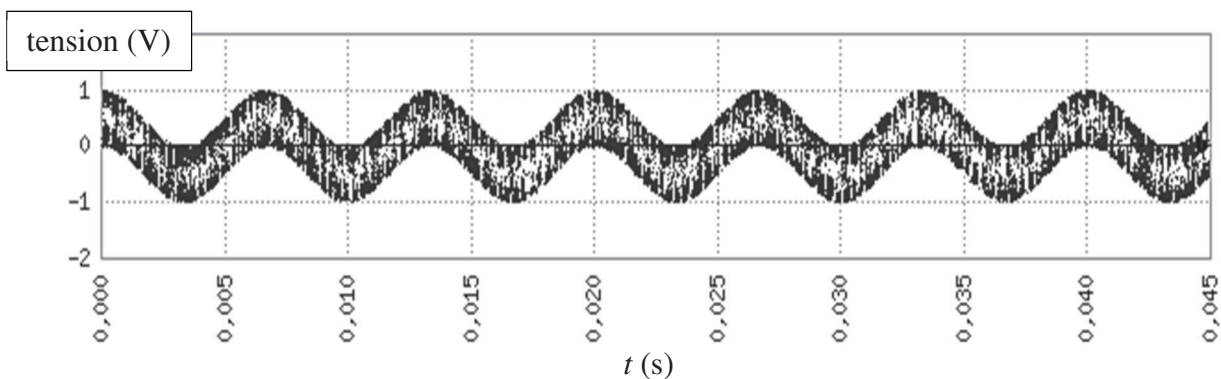
**Figure 10** – Circuit de détection de différence de fréquences

Rappel :  $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .

**Q19.** Établir l'expression de la tension  $v_X(t)$  en sortie du multiplieur et représenter son spectre.

**Q20.** Sachant que l'on souhaite obtenir en sortie du filtre un signal permettant de déterminer la différence de fréquence  $\Delta f = |f_r - f_d|$  entre les oscillateurs, proposer un montage passif simple permettant d'isoler la composante pertinente du signal. Déduire du **document 3** une valeur numérique plausible de sa fréquence de coupure.

**Q21.** Lors d'une tentative de détection, le signal  $v_X(t)$  suivant (**figure 11**) a été enregistré en sortie du multiplieur. En déduire l'écart entre les deux fréquences des oscillateurs et prévoir ce qui sera détecté en sortie du filtre.



**Figure 11** – Tension enregistrée en sortie du multiplieur

# Un modèle simplifié de génératrice linéaire : le rail de Laplace

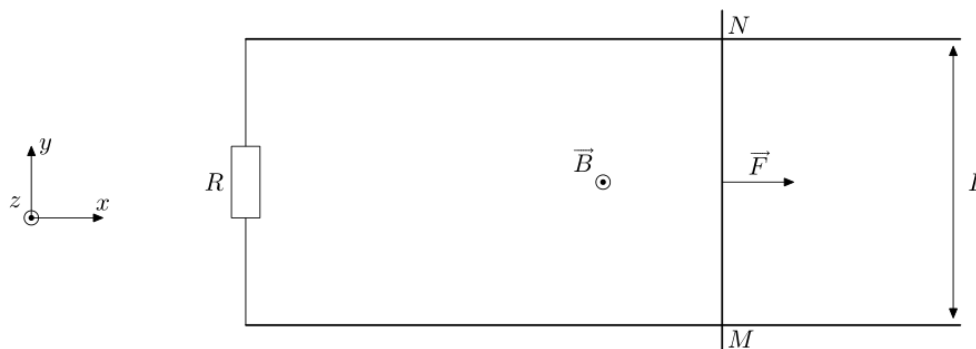


Figure A Schéma de l'expérience des rails de Laplace

## IV.A – Présentation du système

On considère le dispositif des rails de Laplace représenté figure A du document réponse. Il est constitué de :

- deux rails fixes conducteurs parallèles distants de  $L$  ;
- une barre conductrice rectiligne mobile  $MN$  de masse  $m$ , pouvant se déplacer suivant la direction des deux rails fixes. Les frottements sont négligés.

L'ensemble forme un circuit déformable, plongé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  stationnaire et uniforme. On considère que le circuit ainsi formé possède une résistance électrique totale  $R$ . La tige est initialement immobile.

On néglige tout phénomène d'auto-induction.

À partir de  $t = 0$ , un opérateur extérieur applique à la barre une force  $\vec{F} = F\vec{e}_x$  constante sur la tige initialement immobile. On repère la position de la tige par son abscisse  $x$ .

- Q 41. Prévoir qualitativement l'évolution de la vitesse de la tige.
- Q 42. Donner l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur une barre conductrice  $MN$  parcourue par un courant  $i$  dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.
- Q 43. On suppose la tige en mouvement, compléter le schéma de la figure A en représentant la force électromotrice d'induction  $\epsilon(t)$ , le courant ainsi que la force de Laplace. On ne cherchera pas à donner les valeurs de ces grandeurs pour le moment.

## IV.B – Étude temporelle

- Q 44. Donner l'expression de la force électromotrice d'induction  $\epsilon(t)$  en fonction de  $v(t)$ ,  $L$  et  $B$ .
- Q 45. Donner l'équation électrique du système liant  $\epsilon(t)$ ,  $i(t)$  et les paramètres du problème.
- Q 46. Donner l'équation mécanique du système liant  $\dot{v}(t)$ ,  $F$ ,  $i(t)$  et les paramètres du problème.
- Q 47. Dédurre des équations précédentes une équation différentielle sur  $v(t)$ .
- Q 48. En déduire la dimension de  $\frac{Rm}{B^2L^2}$ .
- Q 49. Résoudre cette équation différentielle et puis tracer  $v(t)$  en fonction du temps. On fera apparaître sur le graphe le temps caractéristique  $\tau$  du problème. Ces résultats sont-ils en accord avec la prédiction de la question 41 ?

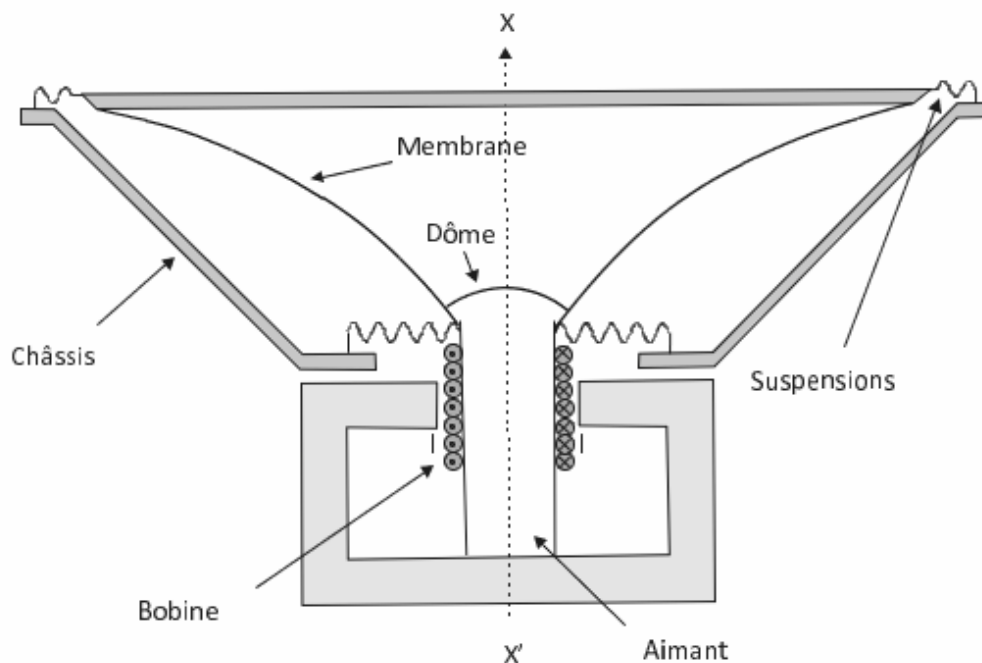
## IV.C – Bilan de puissance

- Q 50. Exprimer la puissance de la force de Laplace  $\mathcal{P}_L$ .
- Q 51. Donner l'expression de la puissance dissipée par effet Joule  $\mathcal{P}_J$  en fonction de  $i(t)$ ,  $L$ ,  $B$  et  $v(t)$ , puis en fonction de la puissance de la force de Laplace  $\mathcal{P}_L$ . Interpréter cette relation.
- Q 52. Donner l'expression de la puissance fournie par l'opérateur extérieur  $\mathcal{P}_{op}$  en fonction de  $F$  et  $v(t)$ .
- Q 53. À partir de l'équation mécanique, effectuer un bilan de puissance global et interpréter chacun des termes.

# Étude d'un haut-parleur électrodynamique

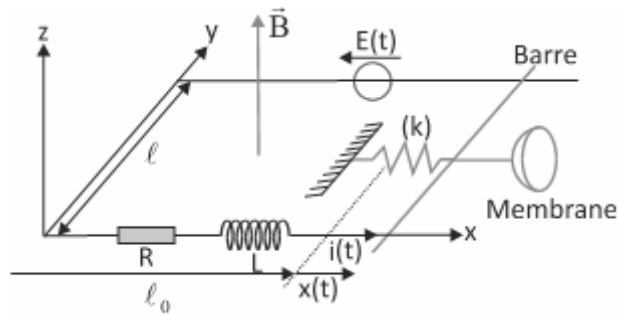
## A - Étude générale

On représente ci-dessous un haut-parleur électrodynamique (**figure 1**). Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe  $(X'X)$ , de résistance  $R$ , d'inductance propre  $L$ , solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction  $(X'X)$  normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique  $x(t)$ , elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur  $k$ . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit  $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$ . On ne tiendra pas compte du poids de l'équipage mobile bobine-membrane.



**Figure 1** - Schéma du haut-parleur de l'étude

La bobine est placée dans un champ magnétique radial  $\vec{B}$ , uniforme en norme, normal à  $(X'X)$ , créé par un aimant permanent. On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la **figure 2**. Le générateur de force électromotrice (f.é.m.)  $E(t)$  délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur  $\ell$  qui se déplace de  $x(t)$ . Cette grandeur  $x(t)$  représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur  $\ell_0$ . La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note  $m_T$  la masse du système {barre, haut-parleur}. On suppose donc que la verticale est définie par l'axe  $z$ , l'axe  $x$  étant horizontal. On note  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  la base des vecteurs unitaires de la **figure 2**.



**Figure 2** - Configuration des rails de Laplace de l'étude

**Q1.** Montrer que la f.é.m. induite  $e$  dans le cadre vaut  $e = -B\ell v(t)$  où  $v(t)$  est la vitesse, dérivée de  $x(t)$ .

**Q2.** Dédire de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera  $i(t)$  le courant induit dans ce circuit.

**Q3.** Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble {barre + haut-parleur} de masse  $m_T$ . En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).

**Q4.** Faire un bilan de puissances en combinant les équations E.E. et E.M. Le commenter.

**Q5.** Comparer la puissance de la f.é.m.  $P_{fem} = ei$  à la puissance de la force de Laplace  $P_L$ .

**Q6.** Le générateur délivre une tension sinusoïdale  $E(t)$  de pulsation  $\omega$ . On utilisera les notations complexes, pour lesquelles  $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$ ,  $E(t)$  s'identifiant alors avec la partie réelle de  $\underline{E}(t)$ . Montrer que l'on a  $\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i} = \underline{Z}_m \underline{i}$  où  $\underline{i}$  est le courant complexe traversant le circuit et  $\underline{Z}_m$  est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de  $B, \ell, \alpha, m_T, \omega$  et  $k$ .

**Q7.** Montrer que l'admittance motionnelle  $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$  peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega} .$$

Donner l'expression des termes  $R_m, C_m$  et  $L_m$  en fonction de  $B, \ell, \alpha, m_T$  et  $k$ .

**Q8.** Dédire de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

Le rendement  $\eta$  du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

**Q9.** Montrer que la relation établie à la **question Q4.** devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle .$$

Commenter ce résultat.

**Q10.** En identifiant la puissance émise par l'onde sonore  $\langle P_{son} \rangle$  à  $\langle \alpha v^2 \rangle$ , où  $v$  est la vitesse de la membrane, montrer que  $\eta$  est de la forme :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[ 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}.$$

On donnera les expressions de  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $\alpha$ ,  $m_T$  et  $k$ .

**Q11.** Commenter la forme obtenue. On pourra par exemple effectuer l'étude asymptotique du comportement en basses et hautes pulsations, ainsi que pour une pulsation proche de  $\omega_0$ .